

# موسسه تدریس خصوصی

## مدرسین تهران

➤ تدریس خصوصی دروس دانشگاهی: مقاطع دکتری، کارشناسی ارشد، کارشناسی

➤ آموزش نرم افزارهای تخصصی: تمامی رشته های مهندسی

➤ ترجمه متون تخصصی: تمامی رشته های دانشگاهی

➤ با همکاری اساتید دانشگاه ها: خانم و آقا

۰۲۱-۷۷۴۹۹۹۲۵

۰۹۲۱-۲۰۲۸۲۹۵



آدرس سایت: [www.ModaresineTehran.com](http://www.ModaresineTehran.com)

پست الکترونیک: [ModaresineTehran@gmail.com](mailto:ModaresineTehran@gmail.com)

کانال تلگرام تهران مرکز: [@Iranian\\_Academics](https://www.instagram.com/Iranian_Academics)



دانشگاه تهران

موسسه تخصصی  
موسسین معادلات دیفرانسیل  
مدرسین  
مدرسین  
سال تحصیلی ۱۳۹۵ - ۱۳۹۶  
سال تحصیلی ۱۳۹۵ - ۱۳۹۶  
سال تحصیلی ۱۳۹۵ - ۱۳۹۶  
سال تحصیلی ۱۳۹۵ - ۱۳۹۶

سمت علمی

مدرسین

مدرسین

سال تحصیلی ۱۳۹۵ - ۱۳۹۶

دانشگاه علوم مهندسی

تاریخ: ۱۳۹۶/۳/۲۵

سمت دوم



دانشگاه های فنی

نام و نام خانوادگی دانشجو: مازیار زاربان  
شماره دانشجویی: ۲۵

۱. جواب معادله دیفرانسیل زیر را به روش سریها، در نزدیکی  $x_0 = 0$  بدست آورید.

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \quad ; \quad x > 0$$

۲. جواب مساله مقدار اولیه زیر را با استفاده از تبدیل لاپلاس بدست آورید. منظور از  $u$  تابع پله‌ای و  $\delta$  تابع دلتای دیراک می‌باشد.

$$2y'' + 10y = 3u_{12}(t) - 5\delta(t - 4) \quad ; \quad y(0) = -1 \quad ; \quad y'(0) = -2$$

۳. الف. لاپلاس معکوس زیر را بدست آورید:

$$e^{-2s} \ln \left( 1 + \frac{1}{s-1} \right)$$

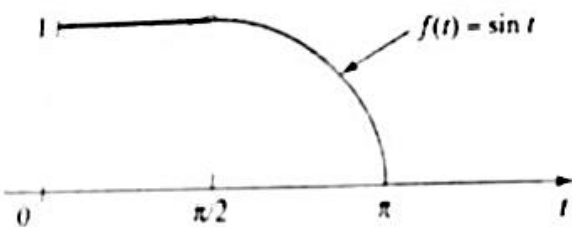
$$\mathcal{L}^{-1} \left( e^{-2s} \ln \left( \frac{s}{s-1} \right) \right)$$

ب. ابتدا

$$f(t) = 0, t > \pi$$

ب. ابتدا  $f(t)$  را بر حسب تابع پله‌ای نوشته و

سپس تبدیل لاپلاس آن را بدست آورید.



مدرسین تهران  
Modaresine Tehran

۲۵

۴. دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را حل نمایید.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} te^{2t} \\ te^{-2t} \end{pmatrix}$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

$$\lambda y'' + 2y' + \lambda y = 0$$

-۱

$$y'' + \frac{2}{\lambda} y' + y = 0$$

$$p(\lambda) = \frac{2}{\lambda}$$

$$p_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda p(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda \times \frac{2}{\lambda} = 2$$

$$q(\lambda) = 1$$

$$q_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 q(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^2 = 0$$

معادله مشخصه:  $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \Rightarrow r(r-1) + 2r = 0$

$$\Rightarrow r^2 + r = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = -1 \end{cases}$$



$$y_1 = \lambda^0 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n$$

$$y_1' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (n) \lambda^{n-1} \rightarrow y_1'' = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (n)(n-1) \lambda^{n-2}$$

با تغییر اندیس در مدار فوق داریم:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n (n)(n-1) \lambda^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (n) \lambda^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^{n+1} = 0$$

حال توی ما را یکی می‌نیم:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) \lambda^{n+1} + \sum_{n=-1}^{+\infty} a_{n+2} (n+2) \lambda^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^{n+1} = 0$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

$$a_1 = 0$$

$$\left[ (n+2)(n+1) + (n+2) \right] a_{n+2} + a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)^2}$$



$$n=0 \rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2^2}$$

$$n=2 \rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = (-1)^2 \frac{a_0}{2^2 \times 4^2} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^2 (1^2 \times 2^2)^2}$$

$$n=4 \rightarrow a_6 = -\frac{a_4}{6^2} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^2 (1^2 \times 2^2 \times 3^2)^2}$$

⋮

$$n=2k \rightarrow a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2^2 (1^2 \times 2^2 \times \dots \times k^2)^2} = \frac{(-1)^k a_0}{(k!)^2}$$

$$n=1 \rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3^2} = 0$$

$$n=3 \rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5^2} = 0$$

⋮

$$a_{2k+1} = 0$$

$$y = \alpha y_1 \ln|x| + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

-۲

$$2y'' + 10y = 3u_{12}(t) - 5\delta(t-4) \quad y(0) = -1$$



$$y'(0) = -2$$

$$2\mathcal{L}(y'') + 10\mathcal{L}(y) = 3\mathcal{L}(u_{12}(t)) - 5\mathcal{L}(\delta(t-4))$$

$$\Rightarrow 2(s^2\mathcal{L} - sx(-1) + 2) + 10\mathcal{L} = 3\frac{e^{-12s}}{s} - 5e^{-4s}$$

$$\Rightarrow 2(s^2 + 5)\mathcal{L} = -s - 2 + \frac{3e^{-12s}}{s} - 5e^{-4s}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{-s}{2(s^2 + 5)} - \frac{1}{s^2 + 5} + \frac{3e^{-12s}}{2s(s^2 + 5)} - \frac{5e^{-4s}}{2(s^2 + 5)}$$

$$\frac{1}{s(s^2 + 5)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 5} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{1}{5} \\ C = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 5)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{5s} - \frac{1}{5(s^2 + 5)}\right)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}} \sin \sqrt{5} t$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s}{2(s^2 + 5)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 5}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3e^{-12s}}{2s(s^2 + 5)}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5e^{-4s}}{2(s^2 + 5)}\right)$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها



$$= -\frac{1}{t} \cos \sqrt{5} t - \frac{1}{\sqrt{5}} \sin \sqrt{5} t + \frac{3}{2} u_{12}(t) \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{5\sqrt{5}} \sin(\sqrt{5}(t-12)) \right)$$

$$- \frac{5}{2} u_4(t) (\cos(\sqrt{5}(t-4)))$$



۳- الف)  $F(s) = \ln\left(\frac{s}{s-1}\right)$  بر روی رسم

$$F(s) = \ln s - \ln(s-1) \Rightarrow F'(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F'(s)) = 1 - e^t \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = -\frac{1}{t} (1 - e^t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-rs} \ln\left(\frac{s}{s-1}\right)\right) = u_r(t) \left(1 - \frac{1}{t-r} (1 - e^{t-r})\right)$$

۲- ب)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \sin t & \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \\ 0 & t > \pi \end{cases}$$

$$f(t) = 1 + u_{\frac{\pi}{2}}(t) (\sin t - 1) + (0 - \sin t) u_{\pi}(t)$$

$$\mathcal{L}(f(t)) = 1 + u_{\frac{\pi}{2}}(t) \sin t - u_{\frac{\pi}{2}}(t) - u_{\pi}(t) \sin t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{s} + e^{-\frac{\pi}{2}s} \underbrace{\mathcal{L}(\sin(t + \frac{\pi}{2}))}_{\cos t} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2}s}}{s} - e^{-\pi s} \underbrace{\mathcal{L}(\sin(t + \pi))}_{-\sin t}$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

$$= \frac{1}{s} + e^{-\frac{r}{p}s} \times \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-\frac{r}{p}s}}{s} + \frac{e^{-\frac{r}{p}s}}{s^2+1}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -r & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t e^{rt} \\ t e^{-rt} \end{bmatrix} \quad -4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = x - y + t e^{rt} \\ y' = -rx - y + t e^{-rt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-1)x + y = t e^{rt} \\ r + (p+1)y = t e^{-rt} \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} t e^{rt} & 1 \\ t e^{-rt} & p+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p-1 & 1 \\ r & p+1 \end{vmatrix}} = \frac{(p+1)(t e^{rt}) - t e^{-rt}}{p^2 - 1 - r}$$

مدرسین تهران  
Modaresine Tehran

$$= \frac{e^{rt} + r t e^{rt} + t e^{rt} - t e^{-rt}}{p^2 - 1 - r} \Rightarrow (p^2 - 1 - r)x = e^{rt} + r t e^{rt} - t e^{-rt}$$

ابتدا در هر سمت را حل می کنیم:

$$p^2 - 1 - r = 0 \Rightarrow r = \pm 2 \Rightarrow \lambda_h = c_1 e^{-rt} + c_2 e^{rt}$$

تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها

حال جواب خصوص این استاندارد را می یابیم:

$$\lambda_p = t e^{rt} (A) + t e^{rt} (Bt + C) + t e^{-rt} (Et + F)$$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda_h + \lambda_p = c_1 e^{-rt} + c_2 e^{rt} + A t e^{rt} + t e^{rt} (Bt + C) + t e^{-rt} (Et + F) \quad \textcircled{I}$$

$$\Rightarrow \lambda' = -r c_1 e^{-rt} + r c_2 e^{rt} + A e^{rt} + r A t e^{rt} + (e^{rt} + r t e^{rt}) (Bt + C) + B t e^{rt} + (e^{-rt} - r t e^{-rt}) (Et + F) + E t e^{-rt} \quad \textcircled{II}$$

از استاندارد اول  $\rightarrow y = \lambda \cdot \lambda' + t e^{rt} = \textcircled{I} - \textcircled{II} + t e^{rt}$



تدریس خصوصی منطبق بر جزوات درسی و نمونه سوالات با همکاری اساتید دانشگاه ها